VII.

Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.

(Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859)

Meinen Dank für die Auszeichnung, welche mir die Akademie durch die Aufnahme unter ihre Correspondenten hat zu Theil werden lassen, glaube ich am besten dadurch zu erkennen zu geben, dass ich von der hierdurch erhaltenen Erlaubniss baldigst Gebrauch mache durch Mittheilung einer Untersuchung über die Häufigkeit der Primzahlen; ein Gegenstand, welcher durch das Interesse, welches Gauss und Dirichlet demselben längere Zeit geschenkt haben, einer solchen Mittheilung vielleicht nicht ganz unwerth erscheint.

Bei dieser Untersuchung diente mir als Ausgangspunkt die von Euler gemachte Bemerkung, dass das Product

$$\Pi \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \Sigma \frac{1}{n^s},$$

wenn für p alle Primzahlen, für n alle ganzen Zahlen gesetzt werden. Die Function der complexen Veränderlichen s, welche durch diese beiden Ausdrücke, so lange sie convergiren, dargestellt wird, bezeichne ich durch $\zeta(s)$. Beide convergiren nur, so lange der reelle Theil von s grösser als 1 ist; es lässt sich indess leicht ein immer gültig bleibender Ausdruck der Function finden. Durch Anwendung der Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-nx}\, x^{s-1}\, dx = \frac{\Pi(s-1)}{n^s}$$

erhält man zunächst

$$\Pi(s-1)\,\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}\, dx}{e^x - 1}.$$

Sulla quantità dei numeri primi inferiori a una data grandezza

(Rendiconto mensile dell'Accademia di Berlino, Novembre 1859) [1]

Non credo di potere esprimere meglio il mio ringraziamento per la considerazione che l'Accademia ha avuto nei miei riguardi, ammettendomi fra i suoi corrispondenti, se non facendo immediatamente uso del privilegio connesso a questo titolo, per comunicare una ricerca sulla frequenza dei numeri primi; argomento che, stante l'interesse mostrato da Gauss e Dirichlet durante lunghi anni, mi sembra non immeritevole di una simile comunicazione.

In questa ricerca, parto dall'osservazione di Eulero sul prodotto

$$\prod \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum \frac{1}{n^s},$$

dove p varia su tutti i numeri primi ed n su tutti i numeri interi. Indico con $\zeta(s)$ la funzione della variabile complessa s rappresentata da queste due espressioni quando convergono. Ambedue convergono soltanto se la parte reale di s è maggiore di 1, tuttavia si può trovare facilmente un'espressione della funzione che resti sempre valida. Applicando l'equazione

$$\int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1} dx = \frac{\Pi(s-1)}{n^s}$$

si ottiene dapprima

$$\Pi(s-1)\,\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}dx}{e^x - 1}.$$

---

[1] Il testo a fronte è riprodotto da *B. Riemann gesammelte mathematische Werke*, 2ª ed., Lipsia, 1892, edizione che sarà indicata con la sigla RW. Nella prima pubblicazione, *Monatsberichte der Berliner Akademie, 3 November 1859*, la Memoria occupa 10 pagine (671-680), nella RW occupa 8 pagine e 11 righe (145-153) ed è seguita da alcune note dell'Editore. La traduzione francese di RW, *Oeuvres Mathématiques de Riemann*, Parigi, 1898, riporta la Memoria e le note dell'Editore nelle pp. 165-176. Una traduzione spagnola, comprensiva delle suddette note, è quella di Juan Arias de Reyna, prelevabile da www.pdipas.us.es/a/arias/TAN2002-3/08-Riemann.pdf. Una traduzione inglese si trova in H. M. Edwards, *Riemann's Zeta Function*, N. Y., 1974, Dover edition 2001, Appendice a p. 299. L'insostituibile opera di Edwards sarà citata, in seguito, colla sigla ZF. Un'altra traduzione inglese è stata pubblicata da D. R. Wilkins nel 1998 e si può prelevare da www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Riemann/Zeta/EZeta.pdf.

Le note **(**[1]**)**, **(**[2]**)**, **(**[3]**)** si riferiscono alle note dell'Editore poste dopo la Memoria (Anmerkungen)..

Betrachtet man nun das Integral

$$\int \frac{(-x)^{s-1}\,dx}{e^x - 1}$$

von $+\infty$ bis $+\infty$ positiv um ein Grössengebiet erstreckt, welches den Werth 0, aber keinen andern Unstetigkeitswerth der Function unter dem Integralzeichen im Innern enthält, so ergiebt sich dieses leicht gleich

$$(e^{-\pi s i} - e^{\pi s i}) \int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{e^x - 1},$$

vorausgesetzt, dass in der vieldeutigen Function $(-x)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-x)}$ der Logarithmus von $-x$ so bestimmt worden ist, dass er für ein negatives x reell wird. Man hat daher

$$2 \sin \pi s\, \Pi(s-1)\, \zeta(s) = i \int_\infty^\infty \frac{(-x)^{s-1}\,dx}{e^x - 1},$$

das Integral in der eben angegebenen Bedeutung verstanden.

Diese Gleichung giebt nun den Werth der Function $\zeta(s)$ für jedes beliebige complexe s und zeigt, dass sie einwerthig und für alle endlichen Werthe von s, ausser 1, endlich ist, so wie auch, dass sie verschwindet, wenn s gleich einer negativen geraden Zahl ist. ([1])

Wenn der reelle Theil von s negativ ist, kann das Integral, statt positiv um das angegebene Grössengebiet auch negativ um das Grössengebiet, welches sämmtliche übrigen complexen Grössen enthält, erstreckt werden, da das Integral durch Werthe mit unendlich grossem Modul dann unendlich klein ist. Im Innern dieses Grössengebiets aber wird die Function unter dem Integralzeichen nur unstetig, wenn x gleich einem ganzen Vielfachen von $\pm 2\pi i$ wird und das Integral ist daher gleich der Summe der Integrale negativ um diese Werthe genommen. Das Integral um den Werth $n 2\pi i$ aber ist $= (-n 2\pi i)^{s-1}(-2\pi i)$, man erhält daher

$$2 \sin \pi s\, \Pi(s-1)\, \zeta(s) = (2\pi)^s\, \Sigma n^{s-1}\left((-i)^{s-1} + i^{s-1}\right),$$

also eine Relation zwischen $\zeta(s)$ und $\zeta(1-s)$, welche sich mit Benutzung bekannter Eigenschaften der Function Π auch so ausdrücken lässt:

$$\Pi\left(\frac{s}{2} - 1\right) \pi^{-\frac{s}{2}}\, \zeta(s)$$

bleibt ungeändert, wenn s in $1 - s$ verwandelt wird.

Diese Eigenschaft der Function veranlasste mich statt $\Pi(s-1)$ das Integral $\Pi\left(\frac{s}{2} - 1\right)$ in dem allgemeinen Gliede der Reihe $\sum \frac{1}{n^s}$

Si consideri adesso l'integrale

$$\int \frac{(-x)^{s-1}dx}{e^x - 1}$$

da + ∞ a + ∞ preso nel verso positivo attorno a un dominio [2] che contenga all'interno il valore 0, ma non altre discontinuità dell'integrando, si ottiene facilmente come valore di questo integrale

$$(e^{-\pi s i} - e^{\pi s i})\int_0^\infty \frac{x^{s-1}dx}{e^x - 1},$$ [3]

qualora nella funzione polidroma $(-x)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-x)}$, il logaritmo di $-x$ sia definito in modo da essere reale per x negativo. Da questo si ottiene

$$2 \sin \pi s \, \Pi(s-1)\, \zeta(s) = i \int_\infty^\infty \frac{(-x)^{s-1}dx}{e^x - 1},$$

essendo l'integrale definito nel piano col suddetto significato.

Questa equazione fornisce adesso il valore della funzione ζ(s) per qualsiasi s complesso e mostra che questa funzione è monodroma, finita per ogni valore finito di s, tranne 1, ed anche che essa si annulla quando s è uguale a un intero negativo pari. **([1])**

Quando la parte reale di s è negativa, allora, invece di essere preso in senso positivo attorno al dominio specificato, questo integrale può essere preso in senso negativo attorno a quel dominio contenente tutte le rimanenti quantità complesse perché l'integrale calcolato con valori di modulo infinitamente grande diventa infinitamente piccolo. Comunque, all'interno di questo dominio, l'integrando ha discontinuità soltanto dove w risulta uguale ad un multiplo intero di $\pm 2\pi i$, e l'integrale è così uguale alla somma degli integrali calcolati in senso negativo attorno a questi valori. Poiché l'integrale attorno al valore $n2\pi i$ è $= (-n2\pi i)^{s-1}(-2\pi i)$, si ottiene da questi

$$2 \sin \pi s \, \Pi(s-1)\, \zeta(s) = (2\pi)^s \sum n^{s-1}((-i)^{s-1} + i^{s-1}),$$

una relazione tra ζ(s) e ζ(1 – s) che, espressa come segue mediante l'uso di note proprietà della funzione Π:

$$\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\,\zeta(s)$$

rimane invariata quando ad s si sostituisca 1 – s.

Questa proprietà della funzione mi ha indotto a introdurre nel generico termine della serie $\sum \frac{1}{n^s}$ invece di Π(s – 1) l'integrale di $\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)$,

---

[2] "Dominio" traduce il termine *Grössengebiet* (regione o campo di grandezze), ripetuto altre tre volte nella stessa pagina mentre, due pagine dopo, è usato il più semplice *Gebiet*.

[3] Nella traduzione francese, il fattore che moltiplica l'integrale è scritto erroneamente $(-e^{-\pi si} - e^{\pi si})$. Corretto è invece nelle altre traduzioni citate.

einzuführen, wodurch man einen sehr bequemen Ausdruck der Function $\zeta(s)$ erhält. In der That hat man

$$\frac{1}{n^s}\,\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}} = \int_0^\infty e^{-nn\pi x} x^{\frac{s}{2}-1}\,dx,$$

also, wenn man

$$\sum_1^\infty e^{-nn\pi x} = \psi(x)$$

setzt,

$$\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\,\zeta(s) = \int_0^\infty \psi(x)\, x^{\frac{s}{2}-1}\,dx,$$

oder da

$$2\psi(x)+1 = x^{-\frac{1}{2}}\left(2\psi\left(\frac{1}{x}\right)+1\right), \text{ (Jacobi, Fund. S. 184) *)}$$

$$\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\,\zeta(s) = \int_1^\infty \psi(x)\, x^{\frac{s}{2}-1}\,dx + \int_0^1 \psi\left(\frac{1}{x}\right) x^{\frac{s-3}{2}}\,dx$$
$$+\tfrac{1}{2}\int_0^1 \left(x^{\frac{s-3}{2}} - x^{\frac{s}{2}-1}\right)dx$$
$$= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \psi(x)\left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{1+s}{2}}\right)dx.$$

Ich setze nun $s = \frac{1}{2} + ti$ und

$$\Pi\left(\frac{s}{2}\right)(s-1)\,\pi^{-\frac{s}{2}}\,\zeta(s) = \xi(t),$$

so dass

$$\xi(t) = \tfrac{1}{2} - \left(tt+\tfrac{1}{4}\right)\int_1^\infty \psi(x)\, x^{-\frac{3}{4}} \cos\left(\tfrac{1}{2}t\log x\right) dx$$

oder auch

$$\xi(t) = 4\int_1^\infty \frac{d\left(x^{\frac{3}{2}}\psi'(x)\right)}{dx}\, x^{-\frac{1}{4}} \cos\left(\tfrac{1}{2}t\log x\right) dx.$$

Diese Function ist für alle endlichen Werthe von t endlich, und lässt sich nach Potenzen von tt in eine sehr schnell convergirende Reihe entwickeln. Da für einen Werth von s, dessen reeller Bestandtheil grösser als 1 ist, $\log\zeta(s) = -\Sigma\log(1-p^{-s})$ endlich bleibt, und von den Logarithmen der übrigen Factoren von $\xi(t)$ dasselbe gilt, so kann die Function $\xi(t)$ nur verschwinden, wenn der imaginäre Theil von t zwischen $\frac{1}{2}i$ und $-\frac{1}{2}i$ liegt. Die Anzahl der Wurzeln von $\xi(t)=0$, deren reeller Theil zwischen 0 und T liegt, ist etwa

*) Jacobi's gesammelte Werke Bd. I. S. 235. W.

dal quale si ottiene un'espressione molto opportuna della funzione $\zeta(s)$. In effetti si ha

$$\frac{1}{n^s}\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}} = \int_0^\infty e^{-n\,n\pi x}\,x^{\frac{s}{2}-1}dx\,,$$

allora, ove si ponga

$$\sum_1^\infty e^{-n\,n\pi x} = \psi(x)\,,$$

$$\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \int_0^\infty \psi(x)\,x^{\frac{s}{2}-1}dx\,,$$

oppure, essendo

$$2\,\psi(x)+1 = x^{-\frac{1}{2}}\left(2\psi\left(\frac{1}{x}\right)+1\right),$$ (Jacobi, Fundamenta nova pag. 184) *)

$$\begin{aligned}\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) &= \int_1^\infty \psi(x)\,x^{\frac{s}{2}-1}dx + \int_0^1 \psi\left(\frac{1}{x}\right)x^{\frac{s-3}{2}}dx \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^1\left(x^{\frac{s-3}{2}} - x^{\frac{s}{2}-1}\right)dx \\ &= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \psi(x)\left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{1+s}{2}}\right)dx\,.\end{aligned}$$

Pongo adesso $s = \frac{1}{2} + ti$ e

$$\Pi\left(\frac{s}{2}\right)(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \xi(t),$$

così che

$$\xi(t) = \frac{1}{2} - (t\,t+1)\int_1^\infty \psi(x)\,x^{-\frac{3}{4}}\cos\left(\frac{1}{2}t\log x\right)dx$$

od anche

$$\xi(t) = 4\int_1^\infty \frac{d\,(x^{\frac{3}{2}}\psi'(x))}{dx}\,x^{-\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{1}{2}t\log x\right)dx\,.$$

Questa funzione è finita per tutti i valori finiti di t, e può essere sviluppata in una serie di potenze di t^2 che converge molto rapidamente. Poiché per un valore di s, la cui parte reale è maggiore di 1, $\log\zeta(s) = -\Sigma\log(1-p^{-s})$ resta finito, e lo stesso vale per i logaritmi dei restanti fattori di $\xi(t)$, la funzione $\xi(t)$ può solo annullarsi quando la parte immaginaria di t è compresa fra $\frac{1}{2}i$ e $-\frac{1}{2}i$. Il numero delle radici di $\xi(t) = 0$, le cui parti reali sono comprese fra 0 e T, è circa

*) Opere complete di Jacobi, Vol. I. pag. 235. [Nota dell'edizione RW].
Nella formula che segue, l'edizione *Monatsberichte* reca, nel primo integrale, l'espressione $(x)\psi$ invece di $\psi(x)$.

$$= \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi};$$

denn das Integral $\int d \log \xi(t)$ positiv um den Inbegriff der Werthe von t erstreckt, deren imaginärer Theil zwischen $\frac{1}{2}i$ und $-\frac{1}{2}i$ und deren reeller Theil zwischen 0 und T liegt, ist (bis auf einen Bruchtheil von der Ordnung der Grösse $\frac{1}{T}$) gleich $\left(T \log \frac{T}{2\pi} - T\right) i$; dieses Integral aber ist gleich der Anzahl der in diesem Gebiet liegenden Wurzeln von $\xi(t) = 0$, multiplicirt mit $2\pi i$. Man findet nun in der That etwa so viel reelle Wurzeln innerhalb dieser Grenzen, und es ist sehr wahrscheinlich, dass alle Wurzeln reell sind. Hiervon wäre allerdings ein strenger Beweis zu wünschen; ich habe indess die Aufsuchung desselben nach einigen flüchtigen vergeblichen Versuchen vorläufig bei Seite gelassen, da er für den nächsten Zweck meiner Untersuchung entbehrlich schien.

Bezeichnet man durch α jede Wurzel der Gleichung $\xi(\alpha) = 0$, so kann man $\log \xi(t)$ durch

$$\Sigma \log \left(1 - \frac{tt}{\alpha\alpha}\right) + \log \xi(0)$$

ausdrücken; denn da die Dichtigkeit der Wurzeln von der Grösse t mit t nur wie $\log \frac{t}{2\pi}$ wächst, so convergirt dieser Ausdruck und wird für ein unendliches t nur unendlich wie $t \log t$; er unterscheidet sich also von $\log \xi(t)$ um eine Function von tt, die für ein endliches t stetig und endlich bleibt und mit tt dividirt für ein unendliches t unendlich klein wird. Dieser Unterschied ist folglich eine Constante, deren Werth durch Einsetzung von $t = 0$ bestimmt werden kann.

Mit diesen Hülfsmitteln lässt sich nun die Anzahl der Primzahlen, die kleiner als x sind, bestimmen.

Es sei $F(x)$, wenn x nicht gerade einer Primzahl gleich ist, gleich dieser Anzahl, wenn aber x eine Primzahl ist, um $\frac{1}{2}$ grösser, so dass für ein x, bei welchem $F(x)$ sich sprungweise ändert,

$$F(x) = \frac{F(x+0) + F(x-0)}{2}.$$

Ersetzt man nun in

$$\log \zeta(s) = -\Sigma \log(1 - p^{-s}) = \Sigma p^{-s} + \tfrac{1}{2} \Sigma p^{-2s} + \tfrac{1}{3} \Sigma p^{-3s} + \cdots$$

$$p^{-s} \text{ durch } s \int_p^\infty x^{-s-1}\, dx,\ p^{-2s} \text{ durch } s \int_{p^2}^\infty x^{-s-1}\, dx,\ \ldots,$$

$$= \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi};$$

perché l'integrale $\int d \log \xi(t)$, preso in senso positivo attorno all'insieme dei valori di t, la cui parte immaginaria sia compresa fra $\frac{1}{2}i$ e $-\frac{1}{2}i$ e la cui parte reale sia compresa fra 0 e T è uguale (tranne che per una parte frazionaria dell'ordine della grandezza $\frac{1}{T}$) a $\left(T \log \frac{T}{2\pi} - T\right) i$; ma quest'integrale è uguale al numero delle radici di $\xi(t) = 0$ giacenti in tale dominio, moltiplicato per $2\pi i$. In realtà si trovano all'incirca altrettante radici reali all'interno di questa frontiera,[4] ed

$\boxed{\text{è molto probabile che tutte le radici siano reali.}}$

Al riguardo sarebbe certamente desiderabile una rigorosa dimostrazione; tuttavia ne ho tralasciato provvisoriamente lo studio dopo alcuni fugaci tentativi infruttuosi, perché essa non sembra necessaria allo scopo immediato della mia indagine.[5]

Si indichi con α ogni radice dell'equazione $\xi(\alpha) = 0$, così che si possa esprimere $\log \xi(t)$ mediante

$$\Sigma \log\left(1 - \frac{t\,t}{\alpha\,\alpha}\right) + \log \xi(0);$$

in effetti, poiché la densità delle radici di grandezza t aumenta con t soltanto come $\log \frac{t}{2\pi}$, questa espressione converge e per t infinito diviene infinita soltanto come $t \log t$; pertanto essa differisce da $\log \xi(t)$ per una funzione di tt, che per un t finito resta continua e finita e divisa per tt diventa infinitamente piccola per un t infinito. Tale differenza è dunque una costante, il cui valore può essere determinato ponendo $t = 0$.

Con questi mezzi ausiliari è adesso possibile determinare la quantità dei numeri primi che sono inferiori ad x.

F(x) sia tale quantità quando x non è proprio uguale ad un numero primo, sia invece uguale a tale quantità aumentata di $\frac{1}{2}$ quando x è un numero primo, in modo che per un x che provoca un salto F(x) vari così

$$\frac{F(x+0) + F(x-0)}{2}.$$

Si sostituisca adesso in

$$\log \xi(s) = -\Sigma \log(1 - p^{-s}) = \Sigma\, p^{-s} + \frac{1}{2} p^{-2s} + \frac{1}{3} p^{-3s} + \ldots$$

$$p^{-s} \text{ con } s\int_p^\infty x^{-s-1} dx,\ p^{-2s} \text{ con } s\int_{p^2}^\infty x^{-s-1} dx, \ldots,$$

[4] *Gebiet* è tradotto con "dominio" (cfr. la nota di due pagine precedenti), *Grenze* con "frontiera".
[5] La cornice e la sottolineatura sono del traduttore, come risulta evidente dal testo tedesco.

so erhält man

$$\frac{\log \zeta(s)}{s} = \int_1^\infty f(x) x^{-s-1} dx,$$

wenn man

$$F(x) + \tfrac{1}{2} F(x^{\frac{1}{2}}) + \tfrac{1}{3} F(x^{\frac{1}{3}}) + \cdots$$

durch $f(x)$ bezeichnet.

Diese Gleichung ist gültig für jeden complexen Werth $a + bi$ von s, wenn $a > 1$. Wenn aber in diesem Umfange die Gleichung

$$g(s) = \int_0^\infty h(x) x^{-s} d \log x$$

gilt, so kann man mit Hülfe des Fourier'schen Satzes die Function h durch die Function g ausdrücken. Die Gleichung zerfällt, wenn $h(x)$ reell ist und

$$g(a + bi) = g_1(b) + i g_2(b),$$

in die beiden folgenden:

$$g_1(b) = \int_0^\infty h(x) x^{-a} \cos(b \log x) \, d \log x,$$

$$i g_2(b) = -i \int_0^\infty h(x) x^{-a} \sin(b \log x) \, d \log x.$$

Wenn man beide Gleichungen mit

$$(\cos(b \log y) + i \sin(b \log y)) \, db$$

multiplicirt und von $-\infty$ bis $+\infty$ integrirt, so erhält man in beiden auf der rechten Seite nach dem Fourier'schen Satze $\pi h(y) y^{-a}$, also, wenn man beide Gleichungen addirt und mit $i y^a$ multiplicirt,

$$2 \pi i h(y) = \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} g(s) y^s ds,$$

worin die Integration so auszuführen ist, dass der reelle Theil von s constant bleibt. (2)

Das Integral stellt für einen Werth von y, bei welchem eine sprungweise Aenderung der Function $h(y)$ stattfindet, den Mittelwerth aus den Werthen der Function h zu beiden Seiten des Sprunges dar. Bei der hier vorausgesetzten Bestimmungsweise der Function $f(x)$ besitzt diese dieselbe Eigenschaft, und man hat daher völlig allgemein in modo che si ottenga

$$\frac{\log \xi(s)}{s} = \int_1^{\infty} f(x)\, x^{-s-1} dx \,,$$

dove

$$F(x) + \frac{1}{2} F(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3} F(x^{\frac{1}{3}}) + \dots$$

è stato indicato con f(x).

Quest'equazione è valida per ogni valore complesso a + bi di s, quando a > 1. Ma se con quest'ipotesi è valida l'equazione

$$g\,(s) = \int_0^{\infty} h(x)\, x^{-s} d \log x$$

la funzione h può essere espressa tramite la funzione g per mezzo del teorema di Fourier. Quando h(x) è reale e

$$g(a + bi) = g_1(b) + ig_2(b),$$

l'equazione si divide nelle due:

$$g_1(b) = \int_0^{\infty} h(x)\, x^{-a} \cos\,(b \log x)\, d \log x\,,$$

$$ig_2(b) = -\, i \int_0^{\infty} h(x)\, x^{-a} \sin\,(b \log x)\, d \log x\,.$$

Moltiplicando le due equazioni per

$$(\cos\,(b \log y) + i \sin\,(b \log y))\, db$$

e integrando da a – ∞ a + ∞, si ottiene in ambedue nella parte destra in forza del teorema di Fourier $\pi\, h(y)\, y^{-a}$, allora, sommando le due equazioni e moltiplicando per iy^a,

$$2\, \pi i h(y) = \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} g\,(s)\, y^{s} ds\,,$$

dove l'integrazione deve essere tale che la parte reale di s rimanga costante. **([2])**

Per un valore di y nel quale la funzione h(y) ha un salto discontinuo, l'integrale fornisce il valore medio dei valori che la funzione h assume ai ndue lati della discontinuità. Poiché la funzione f(x) è stata definita in modo da possedere la stessa proprietà, ne consegue in tutta generalità

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\log \zeta(s)}{s} y^s ds.$$

Für $\log \zeta$ kann man nun den früher gefundenen Ausdruck

$$\frac{s}{2} \log \pi - \log(s-1) - \log \Pi\left(\frac{s}{2}\right) + \Sigma^\alpha \log\left(1 + \frac{(s-\frac{1}{2})^2}{\alpha\alpha}\right) + \log \xi(0)$$

substituiren; die Integrale der einzelnen Glieder dieses Ausdrucks würden aber dann ins Unendliche ausgedehnt nicht convergiren, weshalb es zweckmässig ist, die Gleichung vorher durch partielle Integration in

$$f(x) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{d \frac{\log \zeta(s)}{s}}{ds} x^s ds$$

umzuformen.

Da

$$-\log \Pi\left(\frac{s}{2}\right) = \lim \left(\sum_{n=1}^{n=m} \log\left(1 + \frac{s}{2n}\right) - \frac{s}{2} \log m\right),$$

für $m = \infty$, also

$$-\frac{d \frac{1}{s} \log \Pi\left(\frac{s}{2}\right)}{ds} = \sum_1^\infty \frac{d \frac{1}{s} \log\left(1 + \frac{s}{2n}\right)}{ds},$$

so erhalten dann sämmtliche Glieder des Ausdruckes für $f(x)$ mit Ausnahme von

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{1}{ss} \log \xi(0) x^s ds = \log \xi(0)$$

die Form

$$\pm \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{d\left(\frac{1}{s} \log\left(1 - \frac{s}{\beta}\right)\right)}{ds} x^s ds.$$

Nun ist aber

$$\frac{d\left(\frac{1}{s} \log\left(1 - \frac{s}{\beta}\right)\right)}{d\beta} = \frac{1}{(\beta - s)\beta},$$

und, wenn der reelle Theil von s grösser als der reelle Theil von β ist,

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{x^s ds}{(\beta - s)\beta} = \frac{x^\beta}{\beta} = \int_\infty^x x^{\beta-1} dx,$$

$$f(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{\log\zeta(s)}{s}\,y^{s}ds\,.$$

Si può sostituire adesso a logζ l'espressione trovata prima

$$\frac{s}{2}\log\pi-\log(s-1)-\log\Pi\left(\frac{s}{2}\right)+\Sigma^{\alpha}\log\left(1+\frac{(s-1/2)^2}{\alpha\alpha}\right)+\log\xi(0);$$ [6]

l'integrale di ciascun termine di quest'espressione non converge però quando venga esteso all'infinito, per cui è opportuno, tramite un'integrazione per parti, trasformare prima l'equazione in

$$f(x)=-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{\alpha-\infty i}^{\alpha+\infty i}\frac{d\frac{\log\zeta(s)}{s}}{ds}x^{s}ds\,.$$

Siccome

$$-\log\Pi\left(\frac{s}{2}\right)=\lim\left[\sum_{n=1}^{n=m}\log\left(1+\frac{s}{2n}\right)-\frac{s}{2}\log m\right],$$

per m = ∞, allora

$$-\frac{d\frac{1}{s}\log\Pi\left(\frac{s}{2}\right)}{ds}=\sum_{1}^{\infty}\frac{d\frac{1}{s}\log\left(1+\frac{s}{2n}\right)}{ds},$$

così tutti i termini dell'espressione per f(x), con l'eccezione di

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{\alpha-\infty i}^{\alpha+\infty i}\frac{1}{ss}\log\xi(0)x^{s}ds=\log\xi(0)$$

assumono di conseguenza la forma

$$\pm\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{\alpha-\infty i}^{\alpha+\infty i}\frac{d\left(\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right)}{ds}x^{s}ds\,.$$

Ma adesso è

$$\frac{d\left(\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right)}{d\beta}=\frac{1}{(\beta-s)\beta},$$

e, quando la parte reale di s è maggiore della parte reale di β,

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-\infty i}^{\alpha+\infty i}\frac{x^{s}ds}{(\beta-s)\beta}=\frac{x^{\beta}}{\beta}=\int_{\infty}^{x}x^{s-1}dx\,,$$

[6] Il simbolo di sommatoria non compare nell'edizione *Monatsberichte* e nel manoscritto risulta palesemente aggiunto in un secondo tempo.

oder

$$= \int_0^x x^{\beta-1}\,dx,$$

je nachdem der reelle Theil von β negativ oder positiv ist. Man hat daher

$$\frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{\log x}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{d\left(\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right)}{ds}\,x^s\,ds$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)x^s\,ds$$

$$= \int_\infty^x \frac{x^{\beta-1}}{\log x}\,dx + \text{const. im ersten}$$

und

$$= \int_0^x \frac{x^{\beta-1}}{\log x}\,dx + \text{const. im zweiten Falle.}$$

Im ersten Falle bestimmt sich die Integrationsconstante, wenn man den reellen Theil von β negativ unendlich werden lässt; im zweiten Falle erhält das Integral von 0 bis x um $2\pi i$ verschiedene Werthe, je nachdem die Integration durch complexe Werthe mit positivem oder negativem Arcus geschieht, und wird, auf jenem Wege genommen, unendlich klein, wenn der Coefficient von i in dem Werthe von β positiv unendlich wird, auf letzterem aber, wenn dieser Coefficient negativ unendlich wird. Hieraus ergiebt sich, wie auf der linken Seite $\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)$ zu bestimmen ist, damit die Integrationsconstante wegfällt.

Durch Einsetzung dieser Werthe in den Ausdruck von $f(x)$ erhält man

$$f(x) = Li(x) - \Sigma^\alpha\left(Li\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + Li\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right)$$

$$+ \int_x^\infty \frac{1}{x^2-1}\,\frac{dx}{x\log x} + \log\xi(0), \text{ [3]}$$

wenn in Σ^α für α sämmtliche positiven (oder einen positiven reellen Theil enthaltenden) Wurzeln der Gleichung $\xi(\alpha) = 0$, ihrer Grösse nach geordnet, gesetzt werden. Es lässt sich, mit Hülfe einer genaueren Discussion der Function ξ, leicht zeigen, dass bei dieser Anordnung der Werth der Reihe oppure

$$= \int_0^x x^{s-1} dx\,,$$

a seconda che la parte reale di β sia positiva o negativa. Si ha perciò

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{\alpha-\infty i}^{\alpha+\infty i}\frac{d\left(\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right)}{ds}x^s ds$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-\infty i}^{\alpha+\infty i}\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)x^s ds$$

$$= \int_\infty^x \frac{x^{\beta-1}}{\log x}dx \; + \text{cost. nel primo}$$

e

$$= \int_0^x \frac{x^{\beta-1}}{\log x}dx \; + \text{cost. nel secondo caso.}$$

Nel primo caso la costante d'integrazione resta determinata, quando si faccia tendere la parte reale di β all'infinito negativo; nel secondo caso l'integrale da 0 a x assume valori che differiscono di 2πi, a seconda che l'integrazione riguardante valori complessi avvenga con arco positivo o negativo, e, preso in quel modo, sarà infinitamente piccolo quando il coefficiente di i nel valore di β diventa infinito positivo, ma nel secondo modo, quando il suddetto coefficientte diventa infinito negativo. Da questo segue come vada determinato $\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)$ nel membro a sinistra, in modo che scompaia la costante d'integrazione.

Con l'inserimento di questi valori nella formula di f(x) si ottiene

$$f(x) = \mathrm{Li}(x) - \Sigma^{\alpha}\left(\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right)+\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right)$$

$$+\int_x^\infty \frac{1}{x^2-1}\frac{dx}{x\log x} + \log \xi(0),\ (^3)$$

dove in Σ^{α} figurano al posto di α tutte le radici positive (o che hanno una parte reale positiva) della equazione ξ(α) = 0, disposte secondo l'ordine della loro grandezza. È possibile, con una discussione più esatta della funzione ξ, mostrare facilmente che da questo ordinamento dei valori la serie

$$\Sigma\left(Li\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + Li\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right)\log x$$

mit dem Grenzwerth, gegen welchen

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-bi}^{a+bi}\frac{d\,\frac{1}{s}\,\Sigma\log\left(1+\frac{(s-\frac{1}{2})^2}{\alpha\alpha}\right)}{ds}\,x^s\,ds$$

bei unaufhörlichem Wachsen der Grösse b convergirt, übereinstimmt; durch veränderte Anordnung aber würde sie jeden beliebigen reellen Werth erhalten können.

Aus $f(x)$ findet sich $F(x)$ mittelst der durch Umkehrung der Relation

$$f(x) = \Sigma\frac{1}{n}\,F\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$$

sich ergebenden Gleichung

$$F(x) = \Sigma(-1)^{\mu}\,\frac{1}{m}\,f\left(x^{\frac{1}{m}}\right),$$

worin für m der Reihe nach die durch kein Quadrat ausser 1 theilbaren Zahlen zu setzen sind und μ die Anzahl der Primfactoren von m bezeichnet.

Beschränkt man Σ^{α} auf eine endliche Zahl von Gliedern, so giebt die Derivirte des Ausdrucks für $f(x)$ oder, bis auf einen mit wachsendem x sehr schnell abnehmenden Theil,

$$\frac{1}{\log x} - 2\,\Sigma^{\alpha}\,\frac{\cos(\alpha\log x)\,x^{-\frac{1}{2}}}{\log x}$$

einen angenäherten Ausdruck für die Dichtigkeit der Primzahlen + der halben Dichtigkeit der Primzahlquadrate + $\frac{1}{3}$ von der Dichtigkeit der Primzahlcuben u. s. w. von der Grösse x.

Die bekannte Näherungsformel $F(x) = Li(x)$ ist also nur bis auf Grössen von der Ordnung $x^{\frac{1}{2}}$ richtig und giebt einen etwas zu grossen Werth; denn die nicht periodischen Glieder in dem Ausdrucke von $F(x)$ sind, von Grössen, die mit x nicht in's Unendliche wachsen, abgesehen:

$$Li(x) - \tfrac{1}{2}\,Li\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \tfrac{1}{3}\,Li\left(x^{\frac{1}{3}}\right) - \tfrac{1}{5}\,Li\left(x^{\frac{1}{5}}\right) + \tfrac{1}{6}\,Li\left(x^{\frac{1}{6}}\right)$$
$$- \tfrac{1}{7}\,Li\left(x^{\frac{1}{7}}\right) + \cdots$$

In der That hat sich bei der von Gauss und Goldschmidt vorgenommenen und bis zu $x =$ drei Millionen fortgesetzten Vergleichung von $Li(x)$ mit der Anzahl der Primzahlen unter x diese Anzahl schon vom ersten Hunderttausend an stets kleiner als $Li(x)$ ergeben, und

$$\Sigma\left(\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right)+\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right)\log x$$

concorda con il valore limite verso l'espressione

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-bi}^{a+bi}\frac{d\frac{1}{s}\Sigma\log\left(1+\frac{(s-1/2)^2}{\alpha\alpha}\right)}{ds}x^s ds$$

che converge al crescere incessante della grandezza b, mentre tramite un ordine diverso potrebbe assumere ogni valore reale.

Da f(x) si trova F(x) invertendo la relazione

$$f(x) = \sum\frac{1}{n}F(x^{\frac{1}{n}})$$

dando luogo all'equazione

$$F(x) = \sum(-1)^{\mu}\frac{1}{m}f(x^{\frac{1}{m}}),$$

dove al posto di m si pone la serie dei numeri non divisibili per alcun quadrato tranne 1 e μ indica il numero dei fattori primi di m.

Se si limita Σ^{α} ad un numero finito di termini, allora la derivata dell'espressione di f(x) ovvero, a meno di una parte che decresce molto rapidamente al crescere di x,

$$\frac{1}{\log x}-2\Sigma^{\alpha}\frac{\cos(\alpha\log x)x^{-\frac{1}{2}}}{\log x}$$

fornisce un'espressione approssimata della densità dei numeri primi + metà della densità dei numeri primi al quadrato + 1/3 della densità dei numeri primi al cubo ecc. pertinenti alla grandezza x.

L'approssimazione conosciuta F(x) = Li(x) è dunque giusta solo fino a grandezze dell'ordine di $x^{\frac{1}{2}}$ e fornisce un valore un po' troppo grande; perché i termini non periodici nell'espressione di F(x) sono, prescindendo da grandezze che non crescono infinitamente con x,

$$\mathrm{Li}(x)-\frac{1}{2}\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)-\frac{1}{3}\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{3}}\right)-\frac{1}{5}\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{5}}\right)+\frac{1}{6}\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{6}}\right)$$
$$-\frac{1}{7}\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{7}}\right)+\ldots$$

Infatti, dal paragone, intrapreso da Gauss e Goldschmidt, di Li(x) con il numero di numeri primi inferiori ad x e proseguito fino a x = tre milioni risulta che questo numero, a partire dal primo centinaio di migliaia, è sempre inferiore a Li(x) e zwar wächst die Differenz unter manchen Schwankungen allmählich mit x. Aber auch die von den periodischen Gliedern abhängige stellenweise Verdichtung und Verdünnung der Primzahlen hat schon bei den Zählungen die Aufmerksamkeit erregt, ohne dass jedoch hierin eine Gesetzmässigkeit bemerkt worden wäre. Bei einer etwaigen neuen Zählung würde es interessant sein, den Einfluss der einzelnen in dem Ausdrucke für die Dichtigkeit der Primzahlen enthaltenen periodischen Glieder zu verfolgen. Einen regelmässigeren Gang als $F(x)$ würde die Function $f(x)$ zeigen, welche sich schon im ersten Hundert sehr deutlich als mit $Li(x) + \log \xi(0)$ im Mittel übereinstimmend erkennen lässt.

la differenza fra alcune fluttuazioni subisce un graduale incremento con x. L'addensamento e la rarefazione dei primi, tendenze che nella formula sono descritte dagli elementi periodici, erano già state osservati nel conteggio dei primi, senza che si fosse potuta stabilire una legge al riguardo. Sarebbe interessante, in un futuro conteggio, studiare l'influenza di ogni termine periodico contenuto nell'espressione data per la totalità dei numeri primi. Più regolare di $F(x)$ è il comportamento di $f(x)$ che, già nel primo centinaio, è mediamente molto vicina a $Li(x) + \log \xi(0)$.

Anmerkungen.

In einem Briefe, dessen Entwurf im Nachlass vorliegt, findet sich, nachdem das Resultat der Arbeit mitgetheilt ist, folgende Bemerkung:

„Den Beweis habe ich noch nicht völlig ausgeführt, und ich möchte in Betreff desselben .. noch die Bemerkung beifügen, dass die beiden Sätze, welche ich dort nur angeführt habe,

dass zwischen 0 und T etwa $\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}$ reelle Wurzeln der Gleichung $\xi(\alpha)=0$ liegen, und

dass die Reihe $\Sigma^{\alpha}\left(Li\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right)+Li\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right)$, wenn die Glieder nach wachsenden α geordnet werden, gegen denselben Grenzwerth convergirt, wie

$$\frac{1}{2\pi i\log x}\int\limits_{a-bi}^{a+bi}\frac{d\,\frac{1}{s}\log\frac{\xi\left((s-\frac{1}{2})i\right)}{\xi(0)}}{ds}\,x^{s}\,ds$$ bei unaufhörlichem Wachsen der Grösse b

aus einer neuen Entwicklung der Function ξ folgen, welche ich aber noch nicht genug vereinfacht hatte, um sie mittheilen zu können."

Trotz mancher späterer Untersuchungen (Scheibner, Pilz, Stieltjes) sind die Dunkelheiten dieser Arbeit noch nicht völlig aufgehellt.

(1) (Zu Seite 146.) Dies Verhalten der Function $\zeta(s)$ ergiebt sich mit Benutzung der zweiten Form dieser Function

$$2\,\zeta(s)=\pi i\,\Pi(-s)\int\limits_{\infty}^{\infty}\frac{(-x)^{s-1}\,dx}{e^{x}-1}$$

und mit Rücksicht darauf, dass $\frac{1}{e^{x}-1}+\frac{1}{2}$ in der Entwicklung nach steigenden Potenzen von x nur ungerade Potenzen enthält.

(2) (Zu Seite 149.) Der Ausdruck dieses Satzes ist nicht ganz genau. Die beiden Gleichungen, einzeln in der angegebenen Weise behandelt, ergeben, wenn die Integrationsgrenzen 0, ∞ auf $\log x$ bezogen werden, $\pi y^{-\alpha}\left(h(y)\pm h\left(\frac{1}{y}\right)\right)$, und also erst in ihrer Summe die Formel des Textes.

(3) (Zu Seite 151.) Die Function $Li(x)$ ist für reelle Werthe von x, die grösser als 1 sind, zu definiren durch das Integral $\int\limits_{0}^{x}\frac{dx}{\log x}\pm\pi i$, wo das obere oder das untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem die Integration durch complexe

Dall'Editore delle Opere di Riemann (RW) furono apposte le seguenti

N o t e

In una lettera, di cui esiste la minuta nel lascito,[7] dopo la comunicazione del risultato del lavoro, si trova il seguente appunto:

"Non ho ancora completato la dimostrazione, e desidero allo stesso riguardo ... aggiungere pure l'osservazione che i due teoremi che qui mi limito ad enunciare,

tra 0 e T sono situate all'incirca $\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}$ radici reali dell'equazione $\xi(\alpha)=0$, e

la serie $\sum_{\alpha}\left[\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right)+\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right]$, quando i termini sono ordinati secondo l'ordine crescente di α, converge verso il limite uguale a quello di

$$\frac{1}{2\pi i\log x}\int_{a-bi}^{a+bi}\frac{d\frac{1}{s}\log\frac{\xi((s-1/2)i)}{\xi(0)}}{ds}x^s ds$$ quando la grandezza b cresce senza limite

sono la conseguenza di un nuovo sviluppo della funzione ξ che non ho ancora semplificato a sufficienza da poterlo comunicare."

Nonostante alcuni studi successivi (Scheibner, Pilz, Stieltjes), le oscurità di questo lavoro non sono state ancora completamente chiarite.

(^{1}) (a pagina 146 [pag. 47]) Queste proprietà della funzione $\zeta(s)$ si manifestano con l'impiego della seconda forma di questa funzione

$$2\zeta(s)=\pi i\Pi(-s)\int_{\infty}^{\infty}\frac{(-x^{s-1})dx}{e^x-1}$$

e con la considerazione, inoltre, che $\frac{1}{e^x-1}+\frac{1}{2}$ nello sviluppo secondo le potenze crescenti di x contiene soltanto potenze dispari.

(^{2}) (a pagina 149 [pag. 53]) La dicitura di questa proposizione non è del tutto precisa. Le due equazioni, trattate separatamente nel modo indicato, forniscono, quando i limiti d'integrazione 0, ∞ si riferiscono a logx, $\pi y^{-\alpha}\left(h(y)\pm h\left(\frac{1}{y}\right)\right)$, e quindi, solo tramite la loro somma, la formula del testo.

(^{3}) (a pagina 151 [pag. 57]) Per valori reali di x, che siano maggiori di 1, la funzione Li(x) è definita dall'integrale $\int_0^x\frac{dx}{\log x}\pm\pi i$, dove va preso il segno superiore o inferiore a seconda che l'integrazione

[7] È stato tradotto con *lascito* il termine "Nachlass" che, nella letteratura specifica, indica l'insieme degli appunti matematici superstiti di Riemann, conservati nella Biblioteca dell'Università di Gottinga.

Werthe mit positivem oder negativem Arcus geschieht. Daraus leitet man leicht die von Scheibner (Schlömilch's Zeitschrift Bd. V) gegebene Entwicklung her

$$Li(x) = \log\log x - \Gamma'(1) + \sum_{1,\,\infty}^{x} \frac{(\log x)^n}{n\,.\,n!},$$

die für alle Werthe von x gilt, und für negative reelle Werthe eine Unstetigkeit ergiebt. (Vgl. Gauss-Bessel Briefwechsel.)

Befolgt man die von Riemann angedeutete Rechnung, so findet man in der Formel $\log \frac{1}{2}$ anstatt $\log \xi(0)$. Möglicherweise liegt nur ein Schreib- oder Druckfehler vor, $\log \xi(0)$ an Stelle von $\log \zeta(0)$, da $\zeta(0) = \frac{1}{2}$ ist.

avvenga tramite valori complessi con argomento positivo o negativo. Da questo si deduce facilmente lo sviluppo dato da Scheibner (Periodico di Schlömilch [Zeitschrift für Mathematik und Physik], tomo V)

$$\mathrm{Li}(x) = \log\log x - \Gamma'(1) + \sum_{1,\infty}^{x} \frac{(\log x)^n}{n \cdot n!},$$

che è valido per tutti i valori di x e presenta una discontinuità per valori reali e negativi (cfr. la corrispondenza Gauss-Bessel).

Effettuando il calcolo indicato da Riemann, si trova nella formula $\log\frac{1}{2}$ anziché $\log\xi(0)$. Si tratta forse solo di un errore di scrittura o di stampa, $\log\xi(0)$ al posto di $\log\zeta(0)$, essendo $\zeta(0) = \frac{1}{2}$.

Traduzione di Mauro Bernabei